Sujet

On donne les matrices $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Calculer la matrice M^2.

On donne $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\mathrm{M}^3 = \mathrm{M}^2 + 8\mathrm{M} + 6\mathrm{I}$.

3. En déduire que M est inversible et que :

$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{6}(\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 8\mathrm{I}).$$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $\mathrm{A}(1\,;1)$, $\mathrm{B}(-1\,;-1)$ et $\mathrm{C}(2\,;5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $\mathrm{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.